



گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۲/۱/۲۸

وقت : ۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : ریاضی ۱-فنی (۴ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۹۲ - ۱۳۹۱

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

۱۵ نمره

سوال ۱ - تمام مقادیر z را بیابید بطوریکه : $z^4 = \frac{1+i}{1-i}$

۲۰ نمره

سوال ۲ - اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ 1+x & x \geq 1 \end{cases}$ ، تابع $f \circ g$ را بیابید.

۲۰ نمره

سوال ۳ - بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده هوییتال ، حدهای زیر را محاسبه کنید :

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1} \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + 3})$$

۱۵ نمره

سوال ۴ - مقدار تقریبی $33^{\frac{3}{5}}$ را محاسبه کنید.

۱۵ نمره

سوال ۵ - نمودار تابع $y = \frac{1}{\sin 2x}$ را رسم کنید.

موفق باشید

جواب سوال ۱: ابتدا عبارت را به ساده ترین صورت می نویسیم: $z^{\frac{1}{2}} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$z_k = e^{\frac{(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})i}{2}}$, $k=0,1,2,3$ تمام مقادیر z عبارتند از:

جواب سوال ۲: اگر $x < 1$ آنگاه $g(x) = -x \leq 0$ که نتیجه می دهد $0 \leq x < 1$ و یا $g(x) = -x > 0$ که نتیجه می دهد $x < 0$ و اگر $x \geq 1$ آنگاه $g(x) = 1+x > 0$

بنابر این داریم: $f(g(x)) = \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{2}} & x < 0 \\ \sqrt{1-(-x)} & 0 \leq x < 1 \\ (1+x)^{\frac{1}{2}} & 1 \leq x \end{cases}$ و یا: $f \circ g(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & x < 0 \\ \sqrt{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ (1+x)^{\frac{1}{2}} & 1 \leq x \end{cases}$

جواب سوال ۳: روش اول: با تغییر متغیر $x = t^{\frac{1}{2}}$ داریم:

$l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{\frac{1}{6}}(t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}})}{(t^{\frac{1}{6}} - t^{\frac{1}{3}})(t^{\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{2}} + t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{\frac{1}{6}}}{t^{\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{2}} + t + 1} = \frac{1}{6}$

روش دوم: $l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x^3}}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \times \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x^3}}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \times \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x-1} \times \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})}$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

$l_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + 3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + 3}) \times \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 + 3}}$

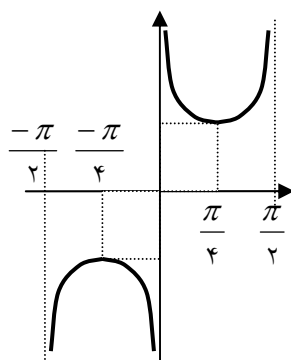
$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - (4/x)}{\sqrt{1 + (1/x)} - \sqrt{1 + (3/x^2)}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

جواب سوال ۴: تابع $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ را در نظر می گیریم. $f(32) = 32^{\frac{3}{5}} = 8$ و $f'(32) = \frac{3}{5}(32)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{20}$ اکنون می توانیم

بنویسیم: $f(33) = f(32+1) \cong f(32) + 1 \times f'(32) = 8 + \frac{3}{20} = 8,15$

جواب سوال ۵: تابع $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ و دامنه $D_f = \mathbf{R} - \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$ است. نمودار تابع

را در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ رسم می کنیم. خطوط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{\pi}{2}$ مجانبهای قائم تابع هستند.



$y' = \frac{-2 \cos^2 x}{\sin^4 x}$, $y' = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$, $y = \pm 1$

اکنون جدول تغییرات را رسم می کنیم.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow -\infty$	$\infty \searrow$	$1 \nearrow \infty$